SYSTEM BINARNEGO I CZWÓRKOWEGO PRZEDSTAWIENA LICZB I WŁAŚCIWOŚCI NIEKTÓRYCH FORM CYLINDRYCZNYCH

**** I. Mykytiuk***
docent katedry matematyki Wschodnioeuropejskiego Narodowego Uniwersytetu im. Lesi Ukrainki doktor nauk fizyko-matematycznych, docent (m. Łuck, Ukraina)

Ta praca analizuje możliwość przedstawienie liczb rzeczywistych w systemie obliczania z podstawą 2 i zestaw liczb 0,1,2,3. Określona jest właściwość geometryczna liczb i właściwości cylindrycznych zbiorów w tego typu zestawieniach, rozwiązywane są najprostsze zadania z powyższej metrycznej teorii liczb. Omawiane są możliwości użycia takiego przedstawienia do badań zbiorów fraktalnych, pojedynczych rozkładów prawdopodobieństwa i absolutnie ciągłych rozkładów ze skomplikowaną gęstością lokalną. Zainteresowanie wobec takich przedstawień popierane jest również faktem, iż związane są one z istniejącymi problemami współczesnej teorii prawdopodobieństwa i analizy fraktalnej. W pełni zbadana została teoria pokrywanych zbiorów cylindrycznych, będąca podstawą do zbadania całości metrycznej teorii takich przedstawień i odpowiedniej fraktalnej „geometrii liczb".

Słowa kluczowe: przedstawienie liczb, geometryczna istota liczb, właściwości zbiorów cylindrycznych.

BINARY CHETRO IMAGE NUMBERS AND THE PROPERTIES OF THE CORRESPONDING CYLINDRICAL SETS

The paper is devoted to the investigation of binary system of numeration with extended set of digits {0,1,2,3}. A geometrical structure (a geometrical sense of digits and cylindrical set) of such a representation is studied and the simpliest problems of the corresponding metric number theory are solved. We discuss the possibility of such representation for the defining and for the studying of fractal sets, singular probability distributions and absolutely continous probability distributions with locally-complicated densities. An interest in such representations is stimulated by their connections with existing problems of modern probability theory and fractal analysis. The "technology" of intersections of cylindrical sets, which is the base for the development of general metric theory of such representations and the corresponding analytical fractal "geometry of numbers" is completely studied.

Keywords: representation of numbers, geometric entity numbers, properties of cylindrical sets.

ДВІЙКОВО-ЧЕТВІРКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ВЛАСТИВОСТІ ВІДПОВІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ МНОЖИН

Дана робота розглядає представлення дійсних чисел в системі числення з основою 2 і набором цифр 0,1,2,3. Визначається геометрична суть цифр і властивості циліндричних множин в такому представленні, розв'язуються найпростіші задачі відповідної метричної теорії чисел. Обговорюються можливості такого представлення для дослідження фрактальних множин, сингулярних розподілів ймовірностей та абсолютно неперервних розподілів з локальною складною щільністю. Інтерес до таких представлень підкріплений їх зв'язком з існуючими проблемами сучасної теорії ймовірностей і фрактального аналізу. Повністю вивчена теорія перекриттів циліндричних множин, що є основою для вивчення

цілісної метричної теорії таких представлень і відповідної аналітичної фрактальної «геометрії чисел».

Ключові слова: подання чисел, геометрична сутність чисел, властивості наборів циліндричних.

1. Канонічне двійково-четвіркове зображення чисел

Означення канонічне двійково-четвіркове зображення чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}$$

Числа *x* називається канонічним, якщо одночасно виконуються умови:

(1) воно не містить періоду (1);

(2) існує номер *m* такий, що

(3) $\alpha_{m+j} \in \{0,1\}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$

(4) $\alpha_i \in \{2,3\}, i = \overline{1,m}$ причому $\alpha_i = 3$ для всіх i$< m$

З означення ясно, що канонічне двійково-четвіркове зображення чисел або не має цифри 2 взагалі, або ж $\alpha_m = 2$.

Прикладами канонічного двійково-четвіркового зображення чисел є:

$x = \Delta_{333320100100010\dots}$

$x = \Delta_{33101100111000\dots}$,

$x = \Delta_{2101100111000\dots}$

Лема 2. Кожне число $x \in [0;3]$ має єдине канонічне двійково-четвіркове зображення.

Наслідок. Якщо $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}$ і $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k \dots}$ - канонічні двійково-четвіркові розклади (зображення) чисел *x* та *y* відповідно, то

1. $x = y \iff \alpha_k = \beta_k, \forall k \in \mathbb{N};$

2. $x < y \iff \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ \alpha_m < \beta_m \end{cases}; i = \overline{1, m-1}$

Далі канонічне двійково-четвіркове представлення *x* зображатимемо $\bar{\Delta}_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)}$

Маючи канонічні двійково-четвіркові зображення, повернемося до властивостей циліндричних множин. Подання циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ назвемо канонічним, якщо набір цифр $c_1, c_2, \dots, c_m$ задовольняє вимоги означення канонічного представлення чисел:

(1) Якщо існують цифри 3, то лише на перших місцях;

(2) Далі не більше однієї цифри 2;

(3) Решта цифр це 0 або 1

Якщо подання циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ є канонічним, то и позначатимемо його $\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}$

Властивість 1. $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \bar{\Delta}_{\beta_1 \dots \beta_m} \iff \alpha_k = \beta_k \ \forall k \le m$

Властивість 2. Подання циліндричної множини $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ послідовною заміною пар цифр можна перетворити у канонічне.

Властивість 3. Існує $3 \cdot 2^k - 2$ різних канонічних циліндрів k

Деякі задачі метричної теорії чисел в двійково-четвірковому зображенні.

Нехай $\{V_n\}$ - послідовність підмножин $A = \{0,1,2,3\}$. Розглядається множина

$$C[\Delta, V_n] = \left\{ x: x \in [0;3], x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k = \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} \in V_k \right\}$$

Враховуючи властивості циліндричних множин, легко бачити, що коли для кожного $n \in \mathbb{N}$

(1) $V_n = A$ або навіть $V_n = \{0,3\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;3]$;

(2) $V_n = \{0,1,2\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;2]$;

(3) $V_n = \{0,1\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;1]$

Очевидно також, що коли лише скінченне число разів потужність V_n більша 1, то $C[\Delta, V_n]$ є скінченною множиною. Розглянемо більш цікаві випадки.

Нехай існує послідовність $\{n_m\}$ така, що

(1) $$\begin{cases} n_{2k} - n_{2k-1} = 1, \\ |V_{n_m}| = 1. \end{cases}$$

Очевидно, що коли $\mathbb{N} \setminus \{n_m\}$ скінченна множина, то скінченною є $C[\Delta, V_n]$. Такий випадок виключемо з подальшого розгляду.

Позначимо через Δ^k сукупність всіх попарно різних циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є такі, що належать $C[\Delta, V_n]$, а через $\tilde{\Delta}^k$ - обєднання таких циліндрів. І нехай $V_{n_{k-1}} = \{s_k\}, V_{n_{2k}} = \{d_k\}$.

Лема. Якщо послідовність $\{V_n\}$ задовольняє умову (1) і $V_m = A$ при $m \notin \{n_k\}$ то сукупність $\Delta^{m_{2m}}$ містить

(2) $A_{2_m} = (3 \cdot 2^{n_1 - 1} - 2) \prod_{k=1}^{m} (3 \cdot 2^{n_{2k+1} - n_{2k-1} - 2} - 2)$ містить циліндрів рангу n_{2m}

Теорема. Якщо послідовність множин V_n має властивість: існує послідовність $\{n_m\}$ така, що множина $N \setminus \{n_m\}$ нескінченна і

$$\begin{cases} n_{2k} - n_{k-1} = 1, \\ |V_{n_m}| = 1, \end{cases}$$

при чому $V_n=\{0,1,2,3\}$ при $n \notin \{n_m\}$, то множина $C[\Delta,V_n]$ є:

досконалою;

ніде не щільною,континуальною;

нуль−множиною Лебега;

розмірність Хаусдорфа−Безиковича α_0 якої обчислюється за формулою:

(3) $\alpha_0 (C[\Delta,V_n]) = \log_2 B$, де $B = \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[n_{2m}]{A_{2_m}}$

2. Подання чисел в двійково-пятірковій системі числення

Нехай $A = \{0,1,2,3,4\}$ множина цифр (алфавіт). Для довільної послідовності $\{\alpha_k\}, \alpha_k \in A$, ряд $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots$

Збігається і його сумою є дійсне число $x \in [0:4]$.

І навпаки для довільного $x \in [0:4]$ існує послідовність $\{\alpha_k\}, \alpha_k \in A$ така, що

(4)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \alpha_k$$

Вираз (4) є розкладом числа *x* за степенями 2 з коефіцієнтами α_k з алфавіту *A*. Його називатимемо представленням числа x в двійково-пятірковій системі числення і символічно зображатимемо

(4) $x \equiv \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$

Запис (5) називатимемо двійково-пятірковим зображенням числа x, а α_k - k-тою двійково-пятірковою цифрою x в даному його зображенні.

Очевидно, що числа 0 і 4 мають єдине двійково-пятіркове представлення, причому

(6) $0 = \Delta_{00\ldots0\ldots} \equiv \Delta_{(0)}$ і $4 = \Delta_{44\ldots4\ldots} \equiv \Delta_{(4)}$.

Оскільки

(7) $\frac{c+1}{2^k}+\frac{0}{2^{k+1}}=\frac{c}{2^k}+\frac{2}{2^{k+1}}=\frac{c-1}{2^k}+\frac{4}{2^{k+1}}, c\in\{1,2,3\}, \forall k\in N$

То заміна пар цифр: 20 на 12 або на 04, 30 на 22 або на 14, 40 на 32 або на 24 в двійково-пятірковому зображенні числа x не змінює числа.

Очевидно, що

(8) $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}=\Delta_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(\alpha_k-\beta_k)=0$$

Два зображення числа *x*

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}\ \text{і}\ \Delta_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}$$

Називатимемо формально-різними, якщо існує *k* таке, що $\Delta_{\alpha_k}\neq\Delta_{\beta_k}$

Число $x\in(0;4)$ називатимемо двійково-пятірково-раціональним, якщо для нього існує двійково-пятіркове зображення. Яке містить період 0, всі інші числа називатимемо двійково-пятірково-ірраціональними.

Очевидно, що $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k00\ldots0\ldots}=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}(\alpha_k-1)11\ldots1\ldots}$

Кожне число $x\in[0;4]$ можна представити у вигляді двійкового розкладу за допомогою цифр 0 і 4. Справді, з класичного двійкового представлення числа u∈ $[0;1]$ за допомогою цифр 0 і 1

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}a_i\,, a_i\in\{0;1\},$$

Отримуємо

$$x=4u=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}(4a_i)\in[0;4].$$

Наслідок. Кожне число $x\in(0;4)$ має континуальну множину формально-різних двійково-пятіркових представлень.

3. Властивості циліндричних множин.

Наступні властивості циліндричних множин стосуються геометричних аспектів двійково-пятіркового представлення. Вони розкривають геометричний зміст «двійково-пятіркових цифр» і створюють апарат опису і дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множин чисел.

B.1. Кожна циліндрична множина є відрізком, причому

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}=\left[a;a+\frac{4}{2^m}\right]\ \text{де}\ a=\sum_{i=1}^{m}2^{-i}c_i$$

Наслідок 1. Довжина циліндра $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$ не залежить від його основи, а лише від рангу: $\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}\right|=\frac{1}{2^{m-2}}$

Наслідок 2. Циліндри різних рангів не можуть співпадати.

B.2. $\Delta_{c_1\ldots c_m}=\bigcup_{i=0}^{4}\Delta_{c_1\ldots c_m i}$

B.3. $\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta_{c_1\ldots c_m}=x\equiv\Delta_{c_1\ldots c_m}\in[0:4]\forall\{c_m\}, c_m\in A$

B.4. $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=\Delta_{\beta_1\ldots\beta_m}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{m}2^{-i}(\alpha_i-\beta_i)=0$

Наслідок 1. Рівності циліндрів 2-го рангу вичерпуються наступними:

$\Delta_{02}=\Delta_{10}, \Delta_{13}=\Delta_{21}, \Delta_{24}=\Delta_{40}=\Delta_{32},$

$\Delta_{03}=\Delta_{11}, \Delta_{22}=\Delta_{30}=\Delta_{14}, \Delta_{33}=\Delta_{41},$

$\Delta_{12} = \Delta_{20} = \Delta_{04}, \Delta_{23} = \Delta_{31}, \Delta_{34} = \Delta_{42},$

Наслідок 2. Для того, щоб $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m}$ необхідно і достатньо, щоб набір $(\beta_{1,\dots}\beta_m)$ можна було отримати з набору $(\alpha_{1,\dots}\alpha_m)$ ланцюжком заміни пар (02) на (10), (03) на (11), (12) на (20) або на (04), (13) на (21), (22) на (30) або на (14), (23) на (31), (24)на (40) або на (32), (33) на (41), (34) на (42) або навпаки.

В.5. Перетин двох сусідніх циліндричних множин рангу *k+1*, які належать одній циліндричній множині рангу *k*, є об'єднанням неперервних циліндричних множин вищих рангів, а саме:

$$\Delta_{c_1 \dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+1)} = \Delta_{c_1 \dots c_k (s+1) 0} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k s 4} =$$
$$= \left[a + \frac{s+1}{2^{k+1}}; a + \frac{s+4}{2^{k+1}} \right], \text{де } a = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} c_i,$$
$$\Delta_{c_1 \dots c_k (s+1) 00} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k (s+1) 04} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k s 44}$$
$$s \in \{0,1,2\}$$

Наслідок. Міра перетину $\lambda\left(\Delta_{c_1 \dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+1)}\right) = \frac{3}{2^{k+1}}$

В. 6. Перетин двох циліндричних множин

$$\Delta_{c_1 \dots c_k s} \ i \ \Delta_{c_1 \dots c_k (s+2)}, s \in \{0,1,2\},$$

які належать одній циліндричній множині $\Delta_{c_1 \dots c_k}$ рангу k, є циліндром (k+2)-го рангу, а саме:

$$\Delta_{c_1 \dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+2)} = \Delta_{c_1 \dots c_k s 4} = \Delta_{c_1 \dots c_k (s+2) 0}$$

Наслідок. Міра Лебега перетину
λ(∆_(c_1…c_k s)∩∆_(c_1 c_k (s+2)))=1/2^(k-1)

В. 7. Перетин двох циліндричних множин
∆_(c_1…c_k s) і ∆_(c_1…c_k (s+3)),s∈{0,1},

Які належать одній циліндричній множині ∆_(c_1…c_k s) рангу k, є циліндром (k+3)-го рангу, а саме:
∆_(c_1…c_k s)∩∆_(c_1 c_k (s+3))=∆_(c_1…c_k s44)=∆_(c_1…c_k (s+3)00)

4. Канонічне двійково-пятіркове зображення чисел.

Означення. Двійково-пятіркове зображення

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \alpha_k = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}$$

Числа x називається канонічним, якщо одночасно виконуються умови:

(1) воно не містить періоду (1);

(2) існує номер *m* такий, що

(3) $\alpha_{m+j} \in \{0,1\}$ для будь-якого j∈ $\mathbb{N}$;

(4) $\alpha_i \in \{2,3,4\}, i = \overline{1,m}$ причому $\alpha_i = 4$ для всіх $i < m$

З означення ясно, що канонічне двійково-пятіркове зображення числа або не має цифр 2 і 3 взагалі, або ж одна з цифр стоїть на m-му місці. Прикладами канонічного двійково-пятіркового зображення чисел є:

$x = \Delta_{444420100100010\dots},$

$y = \Delta_{444101100111000\dots},$

$z = \Delta_{3101100111000\dots},$

Наслідок 1. Кожне число $x \in [0,4]$ має канонічне двійково-пятіркове представлення, причому єдине.

Наслідок 2. Якщо $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ і $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}$ - канонічні двійково-пятіркові розклади чисел *x* та *y* відповідно, то

$$1.\ x = y \iff \alpha_k = \beta_k\ , \forall k \in \mathbb{N};$$

$$2.\ x < y \iff \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ \alpha_m < \beta_m \end{cases} ;\ i = \overline{1, m-1}$$

Далі канонічне двійково-четвіркове представлення x зображатимемо Δ¯_(α_1 (x)…α_k (x))

Маючи канонічні двійково-четвіркові зображення, повернемося до властивостей циліндричних множин. Подання циліндра Δ_(c_1 c_2 ⟦…c⟧_m) назвемо канонічним, якщо набір цифр c_1,c_2,…,c_m задовольняє вимоги означення канонічного представлення чисел:

(1)Якщо існують цифри 4, то лише на перших місцях;

(2) Далі не більше однієї цифри 2 або 3;

(3) Решта цифр це 0 або 1

Якщо подання циліндра Δ_(c_1 ⟦…c⟧_m) є канонічним, то и позначатимемо його Δ¯_(c_1 ⟦…c⟧_m)

В. 8. Δ¯_(α_1 ⟦…α⟧_m)=Δ¯_(β_1 ⟦…β⟧_m) ⟺ α_k=β_k ∀k≤m

В. 9. Подання циліндричної множини Δ_(2,…2_m) послідовною заміною пар цифр (див.наслідок 2 з властивості 4)можна перетворити у канонічне.

Наслідок: Існує 2^(k+2)-3 різних канонічних циліндрів рангу k.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклад на ряди Остроградського // Укр. мат. журн. - 2007. - 59, №9. - С. 1155-1168.
2. Постников А.Г. Арифметическое моделирование случайных процессов // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР - 1960. - 57. - С. 3-84
3. Бородін О.І. Теорія чисел. - Київ: Вища школа, 1970. - 274 с.
4. Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: Просвещение, 1966. - 384 с.
5. Окстоби Д. Мера и категория. - М., 1974.- 156с.
6. Понтрягин Л.С.Обобщения чисел. - М.: Наука, 1986. - 120с.
7. Постнников А.Г. Вероятностная теория чисел. - М.: Знание, 1974. - 62с.
8. Працевитый М.В. Случайные величины с независимыми Q2 символами // Асимпточеские методы в исследовании стохастических моделей. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 92-102.
9. Працевитый М.В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы иисследования алгебраических и топологических структур. - К.: КГПИ, 1989. - С. 95-105.
10. Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.Н. Топологометричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат. - 2002. - Вип. 67. - С. 9-13
11. Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. Геометрия чисел. - М.: Наука, 2008. - 727 с.
12. Дмитренко С.О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних обєктів // Наукові записки НПУ ім.. Н. П, Драгоманова. Фізико-мат. науки. - №4, 2003. - С. 233-340.

BINARY CHETRO IMAGE NUMBERS AND THE PROPERTIES OF THE CORRESPONDING CYLINDRICAL SETS

I. MYKYTIUK

1. Of the canonical binary-cetho image numbers
Definition of the canonical binary-cetho image numbers
The number x is called canonical, if both conditions are satisfied:
(1) it does not contain a period (1);
(2) there exists a number m such that
(3) for any
(4) for all i and
From the definition it is clear that the canonical binary-cetho image numbers or does not have the number " 2 " in General, or .
Examples of the canonical binary-cetho image of numbers is:

$$x = \Delta_{333320100100010\ldots,}$$

$$x = \Delta_{33101100111000\ldots,}$$

$$x = \Delta_{2101100111000\ldots,}$$

Lemma 2. Each number has a unique canonical binary-cetho image.
The result. If the i - canonical binary-chetro hands (image) of x and y respectively, then
2. Then the canonical binary-cetho view x sobratema
Having a canonical binary-chetro image, back to the properties of cylindrical sets. Representation of the cylinder is called canonical, if the set of numbers satisfies the requirements of the definition of the canonical representation of numbers:
(1) If there are 3 digits, only the first field;
(2) no more than one figure 2;
(3) the Remaining digits is 0 or 1
If the representation of a cylinder is canonical, and we will denote it
Property 1.
Property 2. View of the cylindrical plurality of consecutive replacement pair of digits can be converted to canonical.
Property 3. There are various canonical cylinders k
Some of the tasks the metric theory of numbers in BCD jethva the image.
Let be a sequence of subsets .

Examines a variety

$$C[\Delta, V_n] = \left\{x: x \in [0;3], x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k = \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} \in V_k\right\}$$

Given the properties of cylindrical sets, it is easy to see that when each
(1) $V_n = A$ або навіть $V_n = \{0,3\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;3]$;
(2) $V_n = \{0,1,2\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;2]$;
(3) $V_n = \{0,1\}$, то $C[\Delta, V_n] = [0;1]$

It is also evident that when only a nite number of times power is greater than 1, that is, a finite set. Consider the more interesting cases.
Let there exists a sequence such that

$$(1)\quad \begin{cases} n_{2k} - n_{2k-1} = 1, \\ |V_{n_m}| = 1. \end{cases}$$

Obviously, if a finite set, then of course there is . Such a case vykluchena from further consideration.

We denote the set of all pairwise distinct cylinders of rank k among internal points which are such as belong to , and through the Association of such cylinders. And let

LEM. If the sequence satises (1) and contains a collection

(2) contains cylinders of rank

(3)

(4) Theorem. infinite and

(5) $\begin{cases} n_{2k} - n_{k-1} = 1, \\ |V_{n_m}| = 1, \end{cases}$

what V_n={0,1,2,3} for n∉{n_m },the set C[▵,V_n] are:

perfect;

nowhere dense,continuous;

zero−Lebesgue many;

Hausdorff dimension−besikovitch α_0 which is calculated by the formula:

(3) 〖α〗_0 (C[▵,V_n])=log_2 B,where B= lim┬(m→∞) ⁡〖(A_(2_m)^(1/n_2m) 〗

2. The representation of numbers in binary-Patravi notation

Let a set of digits (alphabet). For an arbitrary sequence , a number

Matches and its sum is a real number $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots$.

And Vice versa for an arbitrary there exists a sequence such that (4)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \alpha_k$$

The expression (4) is the decomposition of the number x in powers of 2 with coefficients α_k from the alphabet A. It will be called the representation of x in BCD Patravi notation and symbolic subrogation (4) $x \equiv \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$

Record (5) we will call the binary-Patravi the image number x, a k-th binary-petrovay figure x in this image.

It is obvious that 0 and 4 have a single binary-Petrova view, and

(6) i .

Since

(7) $\frac{c+1}{2^k} + \frac{0}{2^{k+1}} = \frac{c}{2^k} + \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{c-1}{2^k} + \frac{4}{2^{k+1}}, c \in \{1,2,3\}, \forall k \in N$

The replacement of pairs of digits: 20 on 12 or 04, 30 to 22 or 14, 40 to 32 or 24 in BCD patrawala the image number x does not change the number.

Obviously

(8)

We will call the formally distinct if there exists k such that

The number we call binary-Petrovo-rational if there exists a binary-Petrova image. Which includes period 0, all other numbers will be called BCD Petrova is irrational.

Obviously

Each number can be represented as a binary decomposition using the digits 0 and 4. Indeed, from classical binary representation of a number u using the digits 0 and 1

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} a_i, a_i \in \{0; 1\},$$

Get

$$x = 4u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(4a_i) \in [0;4].$$

The result. Each number $x \in (0;4)$ has continually many formally different binary Petrovich views.

3. The properties of cylindrical sets.

The following properties of cylindrical sets on geometric aspects of binary-petrkovice view. They reveal the geometric meaning of "BCD Petrovich numbers" and create the device descriptions and research topology-metric and fractal properties of sets of numbers.

V. 1. Every cylindrical set is cut, and

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_m} = \left[a; a + \frac{4}{2^m}\right] \text{ де } a = \sum_{i=1}^{m} 2^{-i} c_i$$

Corollary 1. The length of the cylinder $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}$ does not depend on its fundamentals, but only on rank: $\left|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}\right| = \frac{1}{2^{m-2}}$

Corollary 2. Cylinders of different ranks cannot be the same.

B.2. $\Delta_{c_1\dots c_m} = \bigcup_{i=0}^{4} \Delta_{c_1\dots c_m i}$

B.3. $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1\dots c_m} \in [0:4] \forall\{c_m\}, c_m \in A$

B.4. $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \Delta_{\beta_1\dots\beta_m} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}(\alpha_i - \beta_i) = 0$

Corollary 1. Equality of cylinders 2 rank limited to:

$\Delta_{02} = \Delta_{10}, \Delta_{13} = \Delta_{21}, \Delta_{24} = \Delta_{40} = \Delta_{32},$

$\Delta_{03} = \Delta_{11}, \Delta_{22} = \Delta_{30} = \Delta_{14}, \Delta_{33} = \Delta_{41},$

$\Delta_{12} = \Delta_{20} = \Delta_{04}, \Delta_{23} = \Delta_{31}, \Delta_{34} = \Delta_{42},$

Corollary 2. In order $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \Delta_{\beta_1\dots\beta_m}$ is necessary and sufficient that the set $(\beta_{1,\dots}\beta_m)$ it was possible to obtain from the set $(\alpha_{1,\dots}\alpha_m)$ chain replacement pairs (02) (10), (03) to (11), (12) to (20) or (04), (13) to (21), (22) to (30) or (14), (23) to (31), (24) (40) (32), (33) in(41), (34) (42) or Vice versa.

V. 5. The intersection of two adjacent cylindrical sets of rank k+1, belonging to the same cylindrical set of rank k is the Union nepreryvnyh cylindrical sets of the higher ranks, namely:

$\Delta_{c_1\dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+1)} = \Delta_{c_1\dots c_k (s+1) 0} \cup \Delta_{c_1\dots c_k s 4}$

$$\left[a + \frac{s+1}{2^{k+1}}; a + \frac{s+4}{2^{k+1}}\right], \text{де } a = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} c_i,$$

$\Delta_{c_1\dots c_k (s+1) 00} \cup \Delta_{c_1\dots c_k (s+1) 04} \cup \Delta_{c_1\dots c_k s 44}$

$s \in \{0,1,2\}$

The result. The measure of the intersection $\lambda\left(\Delta_{c_1\dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+1)}\right) = \frac{3}{2^{k+1}}$

V. 6. The intersection of two cylindrical sets

$\Delta_{c_1\dots c_k s}$ i $\Delta_{c_1\dots c_k (s+2)}, s \in \{0,1,2\},$

belonging to the same cylindrical plural $\Delta_{c_1\dots c_k}$ grade k is a cylinder (k+2)-th rank, namely:

$\Delta_{c_1\dots c_k s} \cap \Delta_{c_1 c_k (s+2)} = \Delta_{c_1\dots c_k s 4} = \Delta_{c_1\dots c_k (s+2) 0}$

The result. The Lebesgue measure of the intersection

λ(∆_(c_1…c_k s)∩∆_(c_1 c_k (s+2)))=1/2^(k-1)

V. 7. The intersection of two cylindrical sets ∆_(c_1…c_k s) i ∆_(c_1…c_k (s+3)),s∈{0,1}, Belonging to the same cylindrical plural ∆_(c_1...c_k s) of rank k is a cylinder (k+3)-th rank, namely:

∆_(c_1…c_k s)∩∆_(c_1 c_k (s+3))=∆_(c_1…c_k s44)=∆_(c_1…c_k (s+3)00)

4. Of the canonical binary-Petrova image numbers.

Def. Binary Petrova image$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$

The number x is called canonical, if both conditions are satisfied:
(1) it does not contain a period (1);
(2) there exists a number m such that
(3) $\alpha_{m+j} \in \{0,1\}$for any j∈ ℕ ; j∈ ℕ ;;
(4) $\alpha_i \in \{2,3,4\}, i = \overline{1,m}$and $\alpha_i = 4$ для всіх $i < m$

From the definition it is clear that the canonical binary-Patravi the image numbers or no numbers 2 and 3 in General, or one of the numbers stands for the m-th place. Examples of the canonical binary-petrkovice image of numbers is:

$x = \Delta_{444420100100010\ldots}$
$y = \Delta_{444101100111000\ldots}$
$z = \Delta_{3101100111000\ldots}$

Corollary 1. Each number $x \in [0,4]$has a canonical binary-Petrova performance, and the only one.

Corollary 2. If$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ i $\Delta_{\beta_1\ldots\beta_k}$- canonical binary-Petrov schedules x and y respectively, then

$1. x = y \Leftrightarrow \alpha_k = \beta_k, \forall k \in \mathbb{N};$

$$2. x < y \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ \alpha_m < \beta_m \end{cases} ; i = \overline{1, m-1}$$

Then the canonical binary-cetho view x sobratemaΔ ̅_(α_1 (x)…α_k (x))

Having a canonical binary-chetro image, back to the properties of cylindrical sets. Representation of the cylinderΔ_(c_1 c_2 〚…c〛_m)

we will call canonical, if the set of numbers c_1,c_2,…,c_m satisfies the requirements of the definition of the canonical representation of numbers:
(1)If there are numbers 4, only in the first places;
(2) no more than one digit is 2 or 3;
(3) the Remaining digits is 0 or 1

If the representation of a cylinderΔ_(c_1 〚…c〛_m) is canonical, and we will denote it _(c_1 〚…c〛_m)

B. 8. Δ ̅_(α_1 〚…α〛_m)=Δ ̅_(β_1 〚…β〛_m) ⟺ α_k=β_k ∀k≤m

V. 9. The submission of the cylindrical array ∆_(2,…2_m) successive replacement of a pair of numbers (see corollary 2 of 4)can be converted to canonical.

The result: There are 2^(k+2)-3 different canonical cylinders of rank k.

REFERENCES:

1. Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклад на ряди Остроградського // Укр. мат. журн. - 2007. - 59, №9. - С. 1155-1168.
2. Постников А.Г. Арифметическое моделирование случайных процессов // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР - 1960. - 57. - С. 3-84
3. Бородін О.І. Теорія чисел. - Київ: Вища школа, 1970. - 274 с.
4.Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: Просвещение, 1966. - 384 с.
5. Окстоби Д. Мера и категория. - М., 1974.- 156с.
6. Понтрягин Л.С.Обобщения чисел. - М.: Наука, 1986. - 120с.

7. Постнников А.Г. Вероятностная теория чисел. - М.: Знание, 1974. - 62с.

8. Працевитый М.В. Случайные величины с независимыми Q2 символами // Асимпточеские методы в исследовании стохастических моделей. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 92-102.

9. Працевитый М.В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы иисследования алгебраических и топологических структур. - К.: КГПИ, 1989. - С. 95-105.

10. Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.Н. Топологометричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат. - 2002. - Вип. 67. - С. 9-13

11. Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. Геометрия чисел. - М.: Наука, 2008. - 727 с.

12. Дмитренко С.О. Узагальнене двійкове f-кодування дійсних чисел та його використання для дослідження фрактальних обєктів // Наукові записки НПУ ім.. Н. П, Драгоманова. Фізико-мат. науки. - №4, 2003. - С. 233-340.