

GRANICZNA RÓWNOWAGA POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ SFERYCZNEJ SPRĘŻYSTEJ POWŁOKI ZE WSPÓLLINIOWYMI PĘKNIĘCIAMI

Autorzy tej publikacji naukowej rozważają zagadnienie granicznej równowagi poprzecznie izotropowej sferycznej sprężystej powłoki z pęknięciami wylotowymi jest zmniejszona do układu pojedynczych równań całki z nieznanymi limitami całki. Zaproponowany został algorytm liczbowego rozwiązania tego rodzaju pęknięcia przed obciążeniem, parametrami geometrycznymi i mechanicznymi.

Słowa kluczowe: równowaga graniczna, poprzecznie izotropowa sferyczna sprężysta powłoka, model, układ pojedynczych równań całki, metody kwadratury mechanicznej.

LIMIT EQUILIBRIUM OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC-PLASTIC SPHERICAL SHELL WITH COLLINEAR CRACKS

The authors in the scientific article consider the problem of limit equilibrium of elastic- plastic transversely - isotropic spherical shells with through cracks reduced to a system of singular integral equations with unknown boundaries of integration. The algorithm is proposed for the numerical solution of such cracks from the load , geometrical and mechanical parameters.

Keywords: limit equilibrium, transversally isotropic elastic- plastic shell, δ_c model , the system of singular integral equations , method of mechanical quadratures.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З КОЛІНЕАРНИМИ ТРИЩИНАМИ

Авторами у науковій статті розглядається задача про граничну рівновагу пружно-пластичної трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з наскрізними тріщинами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь з



M. Nykolyshyn

doktor nauk fizyko-matematycznych,
profesor, instytut stosowanych
problemów mechaniki i matematyki
im. J. Pidcnihgacha NAN Ukrainy
(Lwów)



N. Zajchuk

doktor nauk technicznych, docent
katedry materiałoznawstwa oraz
plastycznego formowania konstrukcji
inżynierii maszynowej
Narodowego Uniwersytetu technicznego
w Łucku



J. Feshchuk

doktor nauk technicznych, docent
katedry materiałoznawstwa oraz
plastycznego formowania konstrukcji
inżynierii maszynowej Narodowego
Uniwersytetu technicznego w Łucku

невідомими границями інтегрування. Запропоновано алгоритм числового розв'язування таких тріщин від навантаження, геометричних і механічних параметрів.

Ключові слова: гранична рівновага, трансверсально-ізотропна пружно-пластична оболонка, δ_c -модель, система сингулярних інтегральних рівнянь, метод механічних квадратур

Задача про граничну рівновагу пружно-пластичної трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з двома наскрізними тріщинами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими границями інтегрування. Запропоновано алгоритм числового розв'язування таких тріщин від навантаження, геометричних і механічних параметрів.

Реальні тонкостінні конструкції містять різні поверхневі чи внутрішні дефекти (тріщини, пори, включення, непровари, надрізи тощо), які мають різну, як правило нерегулярну геометрію. Зона дефекту може мати декілька внутрішніх тріщин довільної форми. Для побудови розрахункових схем такі дефекти замінують математичними розрізами (тріщинами), які є найбільш небезпечним видом дефектів з точки зору впливу на міцність конструкції. Приймають, що ці тріщини мають ідеально правильну форму, еквівалентні розміри та орієнтацію замінені дефектів. Розрахункові схеми заміни реальних дефектів тріщинами ідеальної форми наведені в [1]. Ці схеми поширюються на корпуси реакторів і парогенераторів, трубопроводи, цистерни та інше енергетичне обладнання, яке підлягає розрахункові на тріщиностійкість.

Зауважимо, що навіть для ідеальних за формою тріщин в трансверсально-ізотропній сферичній оболонці задача про дослідження в ній розподілу напружень є складною через необхідність врахування пластичних деформацій біля тріщин, граничних умов на поверхнях оболонки та впливу параметрів трансверсальної ізотропії. Тому розв'язки таких задач будують в основному наближено. Так для пластин, коли розміри тріщин, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу такі, що пластичні деформації розвиваються на продовженні тріщин вузькими смугами по всій товщині пластини, використовують модель Леонова-Панасюка-Дагдейла, яку в літературі часто називають δ_c - моделлю [2].

Результати, що отримані на основі цієї моделі, підтверджені експериментально [3,4].

На основі аналога δ_c - моделі побудовані розв'язки низки задач про граничну рівновагу пружнопластичних ізотропних оболонок з тріщинами [5]. В даній роботі застосовується аналог δ_c -моделі до дослідження пружнопластичної трансверсально-ізотропної сферичної оболонки, послабленої двома прямолінійними в плані тріщинами, розміщеними вздовж однієї лінії.

Постановка задачі. Розглянемо граничну рівновагу трансверсально-ізотропної сферичної оболонки, послабленої двома колінеарними тріщинами різної довжини. Оболонка знаходиться під дією зовнішнього навантаження, а до берегів тріщин можуть бути прикладені самозрівноважені зусилля та моменти.

Для побудови математичної моделі такої оболонки використаємо аналог δ_c - моделі та рівняння уточненої теорії оболонок типу Тимошенка, яка на відміну від класичної теорії Кірхгофа-Лява дозволяє задовольняти п'ять природних граничних умов на берегах тріщин, враховуючи скінчену зсувну жорсткість в площадках, перпендикулярних до серединної поверхні оболонки. Вузькі смуги пластичності на продовженні тріщин моделюємо поверхнями розриву пружних узагальнених переміщень (переміщень серединної поверхні та

кутів повороту нормалі до неї), тобто фіктивною тріщиною. Реакцію матеріалу пластичної зони на пружний об'єм моделюємо невідомими нормальними $N^{(n)}$, зсувними $S^{(n)}$ та перерізуючими $Q^{(n)}$ зусиллями, а також згинними $M^{(n)}$ та крутними $H^{(n)}$ моментами, які протидіють розкриттю тріщин і задовольняють відповідні умови пластичності тонких оболонок

$$\Phi^{(n)}(N^{(n)}, S^{(n)}, Q^{(n)}, M^{(n)}, H^{(n)}, \sigma_T, \sigma_B) = 0 \quad (n = \overline{1,4}). \quad (1)$$

Тут σ_T, σ_B - поріг пластичності та границя міцності матеріалу.

Отже, пружнопластична задача про граничну рівновагу трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з двома тріщинами заданої довжини зведена до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з двома тріщинами невідомої довжини (невідомі довжини пластичних зон), до берегів яких прикладені невідомі зусилля та моменти, що протидіють розкриттю тріщин і задовольняють умови пластичності (1).

Так як береги реальних тріщин навантажені самозрівноваженими зусиллями та моментами, то на контурі кожної з фіктивних тріщин (реальна тріщина плюс дві пластичні зони) повинні виконуватись умови

$$T_m^+(x, 0) = T_m^-(x, 0) = f_m(x), x \in 2l_m = l_m^p + 2l_m^0 + l_m^m \quad (m = 1, 2), \quad (2)$$

де

$$f_m(x) = \begin{cases} T_m^{(1)} - T_m^0, & \forall x : x \in 2l_m^0 \\ -T_m^0 + T_m^{(2)}, & \forall x : x \in l_m^p \\ -T_m^0 + T_m^{(3)}, & \forall x : x \in l_m^m. \end{cases}$$

Вектори T_m і f_m мають координати

$$T_m = (N_2, S, Q_2, R^{-1}M_2, R^{-1}H), \quad f_m = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5);$$

$2l_m^0$ - довжина реальної тріщини; l_m^p та l_m^m - довжини пластичних зон біля дальніх та ближніх вершин тріщин; індексом "0" відмічені компоненти основного напруженого стану; індексом "1" - зусилля та моменти, прикладені до берегів реальної тріщини; індексами "2", "3" - невідомі зусилля і моменти, що є реакцією пластичних зон l_m^p та l_m^m на пружний об'єм.

Інтегральні рівняння задачі. Розв'язок пружної задачі для трансверсально-ізотропної оболонки з двома тріщинами невідомої довжини, на берегах яких виконуються умови (2), будуємо за допомогою методу дисторсій в теорії тонких оболонок з тріщинами [6,7]. Його суть: оболонці з тріщинами ставиться у відповідність суцільна оболонка із зосередженими на лініях тріщин джерелами власних напружень, що зумовлюють напружено-деформований стан, аналогічний в оболонці з тріщинами. Щоб записати ключові рівняння сферичної оболонки в рамках теорії типу Тимошенка, які враховують наявність власних напружень, компоненти повної деформації запишемо у вигляді

$$e_{ij}(x, y, \gamma) = e_{ij}^{(e)}(x, y, \gamma) + e_{ij}^0(x, y, \gamma) \quad (i, j = \overline{1,3}, i \neq j \equiv 3), \quad (3)$$

де $e_{ij}^{(e)}$ - пружні деформації, які зв'язані з власними напруженнями законом Гука;

e_{ij}^0 - функціонали, що виражаються через стрибки узагальнених переміщень.

Після підстановки (3) в рівняння трансверсально-ізотропної сферичної оболонки отримаємо систему ключових рівнянь: рівняння відносно функції напружень $\varphi(x, y)$, рівняння для визначення прогину $w(x, y)$ та рівняння для визначення кутів повороту $\psi(x, y)$

$$\begin{aligned}\nabla^2(\nabla^2\nabla^2 - \varepsilon d\lambda^2\nabla^2 + \lambda^4)\varphi &= D_0 l_m^2 \left(\frac{l_m^2}{R} F_2^0 - \nabla^2 F_1^0 \right), \\ \nabla^2 w &= R \left(\frac{1}{D_0 l_m^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + F_1^0 \right), \\ (\nabla^2 - l_m^2 k^2) \psi &= F_3^0,\end{aligned}\tag{4}$$

де $F_i^0(x, y), (i = \overline{1, 3})$ - диференціальні оператори, що діють на інтегральні характеристики від e_{ij}^0 [3];

$$d^2 = \frac{\lambda^4}{l_1^4} = \frac{D_0}{DR^2}; \quad k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G'}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

$2h$ - товщина оболонки; R - радіус серединної поверхні оболонки; E і ν - модуль пружності і коефіцієнт Пуассона в серединній поверхні оболонки (поверхні ізотропії); G' - модуль зсуву в площадках, перпендикулярних до серединної поверхні; k' - введений для перерізуючих зусиль коефіцієнт зсуву [8].

Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є, фундаментальні розв'язки першого та третього рівнянь системи (4) запишемо у вигляді [9]

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi\lambda^4} \left\{ \begin{aligned} &\ln r + \frac{1}{2a} [\delta_2^2 K_0(\lambda\delta_1 r) - \delta_1^2 K_0(\lambda\delta_2 r)], \quad b^2 > 1; \\ &\ln r + \frac{1}{2a} [b\varphi_1(\lambda r) + a\varphi_2(\lambda r)], \quad b^2 < 1; \\ &\ln r + K_0(\lambda r) - \frac{\lambda r}{2} K_0'(\lambda r), \quad b^2 = 1 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi} K_0(l_m k r),$$

де $r^2 = x^2 + y^2$, $b = sd/2$, $K_0(z)$ - функція Макдональда.

З використанням (5) та операції згортки побудовані інтегральні представлення параметрів напружено-деформованого стану оболонки, що досліджується. Вони дають можливість виразити зусилля та моменти в довільній точці оболонки через невідомі стрибки переміщень та кутів повороту. Вимагаючи тепер, щоб виконувались умови (2) на кожній з фіктивних тріщин, отримуємо систему 10-ти сингулярних інтегральних рівнянь вигляду

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^5 \sum_{m=1-l_m}^2 \int_{l_m}^{l_m} F_{im}(\xi) \left[\frac{d_{mn}^{ij}}{\xi-x} + K_{nm}^{ij}(\xi, x) \right] d\xi = C_{in} f_{in}(x), \quad x \in l_m \quad (n = \overline{1, 2}, \quad i = \overline{1, 5}). \tag{6}$$

Тут $F_{im}(\xi)$ - похідні від стрибків узагальнених переміщень по нормалі до контуру обох тріщин, $K_{nm}^{ij}(\xi, x)$ - неперервні функції своїх аргументів, $f_{in}(x)$ - функції f_i ($i = \overline{1, 5}$) на кожній із тріщин. Як видно із (2) функції $f_{in}(x)$ є розривними в вершинах реальних тріщин та містять невідомі зусилля і моменти - реакції пластичних зон.

Границі інтегрування в системі (6) невідомі, так як невідомими є довжини пластичних зон. Тому отримані інтегральні рівняння доповнюються умовами пластичності тонких оболонок (в чотирьох зонах) та умовами обмеженості зусиль і моментів в околі вершин тріщин (всі коефіцієнти інтенсивності рівні нулю біля всіх вершин тріщин).

Приклад. У випадку, коли сферична оболонка послаблена двома тріщинами однакової довжини і ці тріщини знаходяться в однакових умовах навантаження, а навантаження є симетричним відносно лінії розташування тріщин, тоді система інтегральних рівнянь (6) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \varphi_j(u) K_{ij}(l(u,s)) du = f_i(s) \quad (i=1,2) \quad (7)$$

Тут $K_{ij} = \frac{d_{ij}}{u-s} + \frac{d_{ij}}{u+s+2d^{(c)}} + K_{ij}(u-s) + K_{ij}(u+s+2d^{(c)})$, $l_1 = l_2 = l$, $s = \frac{x}{l}$, $d^{(c)} = \frac{d_c}{l}$, $2d_c$ -

віддаль між центрами тріщин.

При розв'язуванні інтегральних рівнянь (7) повинні виконуватись умови:

1) однозначності переміщень

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(u) du = 0 \quad (j=1,2) \quad (8)$$

2) умови пластичності Треска

$$\frac{N^{(n)}}{2h\sigma_T} + \frac{3|M^{(n)}|}{h^2\sigma_T} = 1 \text{ - умова пластичності поверхневого шару} \quad (9)$$

або

$$\left(\frac{N^{(n)}}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M^{(n)}|}{h^2\sigma_T} = 1 \text{ - умова пластичного шарніру} \quad (10)$$

3) умови обмеженості зусиль та моментів

$$K_N^{(n)} = 0, \quad K_M^{(n)} = 0 \quad (11)$$

Тут: $n=1,2$ - зони біля ближніх та дальніх вершин тріщин відповідно.

Отже, маємо повну систему рівнянь для визначення: 1) похідних від стрибків узагальнених переміщень, 2) невідомих зусиль та моментів, що діють в пластичних зонах, 3) довжин пластичних зон.

Але праві частини системи (7) є розривними функціями. Числовий експеримент показав, що прямі методи розв'язування таких рівнянь дають похибку в точках розриву, а саме там нам потрібно знати значення величин стрибків для знаходження розкриття вершин реальних тріщин. Тому розв'язок системи (7) шукаємо у вигляді:

$$\varphi_j(u) = h_j(u) + \Omega_j(u), \quad (12)$$

де $h_j(u)$ задовольняють канонічні рівняння, що отримані з (7), тобто:

$$\int_{-1}^1 h_j(u) \frac{d_{ij}}{u-s} = f_i(s) \quad (i=1,2). \quad (13)$$

Підставляючи (12) у (7) з врахуванням (13), отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення функцій $\Omega_j(u)$. В отриманій системі праві частини рівнянь будуть неперервними функціями. Тому для побудови її розв'язку використаємо метод механічних квадратур, який дозволяє отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь. Шукані функції $\Omega_j(u)$ представимо у вигляді

$$\Omega_j(u) = \frac{\psi_j(u) + c_j}{\sqrt{1-u^2}},$$

а для функцій $\psi_j(u)$ будуємо інтерполяційні поліноми Лагранжа за чебишевськими вузлами.

Функції $h_j(u)$ знаходимо за допомогою формули обернення інтегралів типу Коші

$$h_j(u) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-u^2}} \left[\pi D_i^0(N_1^0, M_1^0)u - D_i^0(N^{(n)}, M^{(n)})Z(u) \right], \quad \text{де}$$

$$D_i^0(N, M) = d_{1i} \frac{N}{2h\sigma_T} + d_{2i} \frac{k^* M}{h^2 \sigma_T} \quad (i = 1, 2),$$

$$Z(u) = 2v^* u + L^*(u), \quad v^* = \arctan \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{l_0}{l},$$

$$k^* = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{2}, \quad L^*(u) = \ln \left| \frac{\tau_0 \sqrt{1-u^2} - u \sqrt{1-u^2}}{\tau_0 \sqrt{1-u^2} + u \sqrt{1-u^2}} \right|.$$

Так як границя інтегрування (параметр l) входить в систему алгебраїчних рівнянь нелінійно, тому алгоритм розв'язування цієї системи пропонується такий. Задаємо довжини обох пластичних зон. Задачу розв'язуємо як і у випадку пружної задачі. Далі з умов (11) визначаємо зусилля $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ та моменти $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ і перевіряємо умову пластичності (9) або (10). Якщо вона виконується з наперед заданою точністю, то задача розв'язана. Якщо ні, то певним чином змінюємо l_p та l^p і вся процедура повторюється.

Після інтегрування отриманого розв'язку знаходимо розкриття тріщин за формулою

$$\delta(x, \gamma) = \left[v \left(\frac{x}{l} \right) \right] + \gamma \left[\gamma_2 \left(\frac{x}{l} \right) \right], \quad |x| \leq l, \quad |\gamma| \leq h.$$

Числовий аналіз проведено для трансверсально-ізотропної оболонки з параметрами: $R/h = 100$; $\nu = 0.3$, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності p ($N_2^0 = qR/2$; $M_2^0 = 0$). На рис. 1 показано залежність відносного розкриття вершин тріщин $\delta^* = \delta E/l \Omega_T$ від її довжини для навантаження $N_2^0/(2h\Omega_T)$. Криві 1, 2 відповідають параметрам зсувної жорсткості $E/G' = 2.6$; 20. На рис.2 показано розкриття вершин тріщин при їх взаємодії в ізотропній оболонці ($E/G' = 2.6$). Суцільні криві відповідають ближнім вершинам, а штрихові – дальнім. Криві 1 відповідають довжині тріщин $l/h = 5$, а криві 2 - $l/h = 10$. Розкриття визначалось на серединній поверхні ($\gamma = 0$).

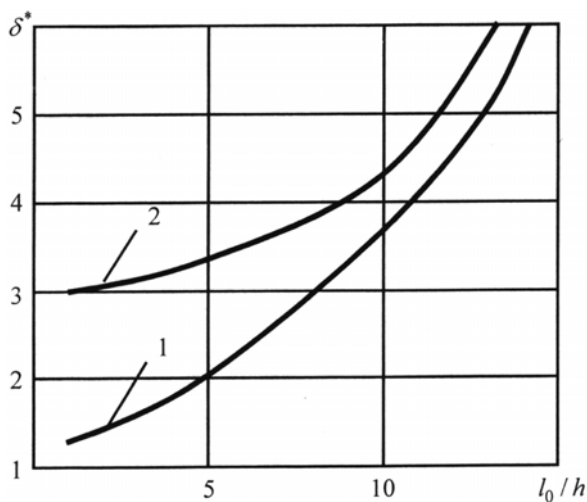


Рисунок 1 – Залежність відносного розкриття вершин тріщин $\delta^* = \delta E/l \Omega_T$ від її довжини для навантаження $N_2^0/(2h\Omega_T)$

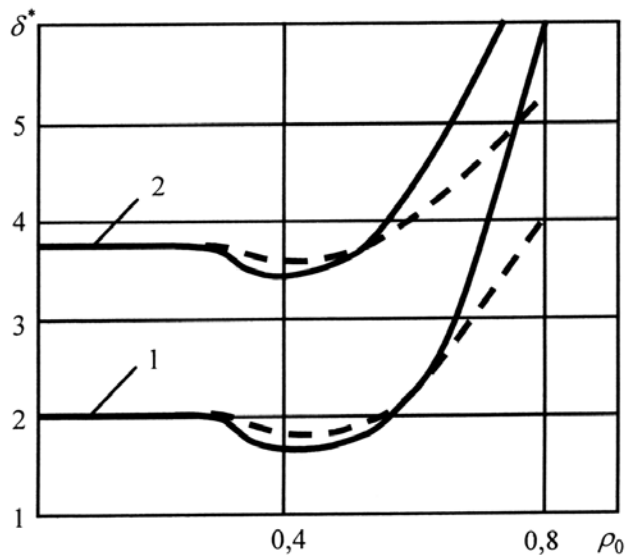


Рисунок 2 – Залежність розкриття вершин тріщин при їх взаємодії в ізотропній оболонці ($E/G' = 2.6$).

Висновки.

1. На основі запропонованого в роботі підходу можна будувати аналітичні розв'язки про граничну рівновагу будь-якої оболонки з тріщинами, для якої побудовано фундаментальний розв'язок.

2. Числовий аналіз показав: для оболонок, завантажених тільки нормальними відносно лінії зусиллями, розкриття тріщини на лицевих поверхнях і на середній поверхні відрізняється не більше 5%; зі зближенням тріщин вплив параметра трансверсальної ізотропії на їх розкриття знижується.

Література

1. Методические рекомендации. МР 108. 7 - 86. Оборудование энергетическое. Расчеты и испытания на прочность – М.: НПО ЦНИИТМШ, 1986.-29 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів.- 1992.- №1.- С.49-68.
3. Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения // Пробл. прочности.-1973.- №2.- С.3-18
4. Fearnough G.D., Watting B. Application of crack opening displacement approach to prediction of pressurized tube failure // Int. J. Fract.- 1968.- 4, №3.- P.233-243.
5. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами.- Львів: “СПОЛОМ”, 2003.- 320с.
6. Підстригач Я.С., Осадчук В.А. До визначення напруженого стану в замкнутій циліндричній оболонці з тріщиною.- ДАН УРСР, сер.А, 1972, № 1
7. Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Федюк Е.М., Николишин М.М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.// В сб. “Мат. методы и физ.-мех. поля”, вып 1, К., “Наукова думка”, 1975-с. 29-41
8. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.- К.: Наук. думка, 1977.- 182с.
9. Осадчук В.А., Федюк Е.М. Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с трещиной.-ДАН УССР, сер.А, 1975, № 2

LIMIT EQUILIBRIUM OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC-PLASTIC SPHERICAL SHELL WITH COLLINEAR CRACKS

M. Nykolyshyn, N. Zajchuk, J. Feshchuk

The problem of limit equilibrium of elastic- plastic transversely - isotropic spherical shell with two cross-cutting fractures reduced to a system of singular integral equations with unknown boundaries of integration. The algorithm for the numerical solution of such cracks on the load , geometrical and mechanical parameters.

Real thin walled structures containing different surface or internal defects (cracks, pores, inclusions, lack of penetration, cuts , etc.) that have different , usually irregular geometry. Zone of defect can have multiple internal cracks of arbitrary shape. For construction design schemes such defects substitute math sections (cracked), which is the most dangerous type of defect in terms of impact on the structural strength.

Take that these cracks are perfectly correct form of equivalent size and orientation replaced defects. Payment schemes replacing real defects cracked ideal form presented in [1]. These schemes are applied to the reactor vessel and steam generators, piping, tanks and other power equipment shall be calculated on crack firmness.

We note that even for perfect in form cracks in transversely isotropic spherical shell problem of research in her stress distribution is complicated by the need to take into account plastic deformation at the crack limits conditions on the surfaces of the shell and the impact of transversely isotropic parameters .

Therefore, solutions of such problems will be approximately. So for the plates when the size of crack, the level of external loads and material properties are such that plastic deformation developing cracks on the continuation of narrow strips across the thickness of the plate, using a model Leonov - Panasyuk - Dahdeyl that in literature often called δ model [2]

The results obtained from this model are confirmed experimentally [3,4].Based on analogue δ_c model are solutions for a number of problems limiting equilibrium isotropic elastic-plastic shells with cracks [5]. In this article we apply similar ξ model for exploration - resilient transversely isotropic spherical shell weakened by two straight in terms of cracks placed along one line.

Formulation of the problem . We consider the limit equilibrium transversally isotropic spherical shell weakened by two collinear cracks of different lengths. The shell is under external load, and the shores of cracks can be applied selfequal efforts and moments.

We use for the construction the mathematical model of such a shell analog δ_c models and equations refined Timoshenko -type shell theory , which is in contrast to the classical theory of Kirchhoff - Liave caters to the five natural limits conditions on the banks of cracks, considering shear rigidity in finite fields, perpendicular to the middle surface shell.

The narrow strip of plasticity to simulate crack extension of surface rupture of elastic generalized displacements (displacements of middle surface and angles of rotation perpendicular to it) , that fictitious crack .

The reaction of the material in the plastic zone volume elastic model the unknown normal $N^{(n)}$, shear $S^{(n)}$ and cutting $Q^{(n)}$ efforts, as well as bending $M^{(n)}$ and torque $H^{(n)}$ moments, which counter disclosing cracks and satisfy the relevant conditions of plasticity of thin shells

$$(1) \Phi^{(n)}(N^{(n)}, S^{(n)}, Q^{(n)}, M^{(n)}, H^{(n)}, \sigma_T, \sigma_B) = 0 \quad (n = \overline{1,4}).$$

Here σ_T, σ_B - the threshold of plasticity and limit of strength the material .

So elastic-plastic problem of limiting equilibrium transversally isotropic spherical shell with two cracks specified length is reduced to the problem of elastic equilibrium of the same membrane with two cracks of unknown length (unknown length of plastic zones), which applied to the shores of the unknown efforts and moments that opposing disclosing of cracks and satisfy the conditions of plasticity (1).

So banks of real cracks loaded selfequal efforts and moments , then the contour of each fictitious cracks (real crack and plus two plastic zones) must be performed conditions

$$(2) T_m^+(x, 0) = T_m^-(x, 0) = f_m(x), x \in 2l_m = l_m^p + 2l_m^0 + l_m^m \quad (m=1,2), \quad (2)$$

where

$$f_m(x) = \begin{cases} T_m^{(1)} - T_m^0, & \forall x : x \in 2l_m^0 \\ -T_m^0 + T_m^{(2)}, & \forall x : x \in l_m^p \\ -T_m^0 + T_m^{(3)}, & \forall x : x \in l_m^m. \end{cases}$$

Vectors T_m and f_m have the coordinates $T_m = (N_2, S, Q_2, R^{-1}M_2, R^{-1}H)$, $f_m = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$

- $2l_m^0$ length of real crack, l_m^p and l_m^m - the length of the plastic zone at the far and near the crack tip , the index "0" marked the main components of the stress state , the index "1" - efforts and moments applied to the shores real cracks index "2" , "3" - unknown efforts and moments , which is a reaction of the plastic zone l_m^p and l_m^m and the elastic volume.

Integral equations of the problem. Solution of the problem of elastic transversally isotropic shell with two cracks of unknown length, on the banks of conditions (2), using the method of building the distortions in the theory of thin shells with cracks [6,7].

Its essence: cracked shell is associated with a solid shell with concentrated on lines of their own sources of stress cracks that cause the stress- strain state , similar of the shell with cracks .

For the writing the key equations of the spherical shell in the theory of type Timoshenko , taking into account the presence of their own stress , total strain components can be written in the form

$$(3) e_{ij}(x, y, \gamma) = e_{ij}^{(e)}(x, y, \gamma) + e_{ij}^0(x, y, \gamma) (i, j = \overline{1,3}, i \neq j \equiv 3),$$

where $e_{ij}^{(e)}$ - elastic deformations that are relevant to their own stresses Hooke's law ;

- e_{ij}^0 functionals that are expressed through jumps of generalized displacements.

After substituting (3) into equation transversally isotropic spherical shell we obtain the system of key equations: the equation relatively to the function of stress $\varphi(x, y)$, equations to determine the deflection $w(x, y)$ and equations to determine the rotation angles $\psi(x, y)$

$$, \nabla^2(\nabla^2 \nabla^2 - \varepsilon d \lambda^2 \nabla^2 + \lambda^4) \varphi = D_0 l_m^2 \left(\frac{l_m^2}{R} F_2^0 - \nabla^2 F_1^0 \right),$$

$$\nabla^2 w = R \left(\frac{1}{D_0 l_m^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + F_1^0 \right), \quad (4)$$

$$(\nabla^2 - l_m^2 k^2) \psi = F_3^0 ,$$

where $F_i^0(x, y), (i=\overline{1,3})$ differential operators acting on the integral characteristics of e_{ij}^0 [3];

$$d^2 = \frac{\lambda^4}{l_1^4} = \frac{D_0}{DR^2}; \quad k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G'}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

- $2h$ the thickness of the shell , R the radius of the middle surface of the shell , and E and ν - elastic modulus and Poisson's ratio of the median surface of the shell (surface of isotropy);
- G' modulus of mudslide in the fields, perpendicular to the middle surface -
 k' introduced for cutting efforts of ratio shift [8].

Using the integral transform of Fourier, fundamental solutions of the first and third

$$(5) \quad \text{equations of system (4) is written as [9]} \quad \varphi_0 = \frac{1}{2\pi\lambda^4} \left\{ \begin{array}{l} \ln r + \frac{1}{2a} [\delta_2^2 K_0(\lambda\delta_1 r) - \delta_1^2 K_0(\lambda\delta_2 r)], \quad b^2 > 1; \\ \ln r + \frac{1}{2a} [b\varphi_1(\lambda r) + a\varphi_2(\lambda r)], \quad b^2 < 1; \\ \ln r + K_0(\lambda r) - \frac{\lambda r}{2} K_0'(\lambda r), \quad b^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi} K_0(l_m k r),$$

where $r^2 = x^2 + y^2$, $b = sd/2$, $K_0(z)$ the function of Macdonald .

Using (5) and the convolution operation parameters based integral representation of the stress-strain state of the shell is investigated . They make it possible to express the efforts and moments at any point through the shell jumps unknown displacements and rotation angles . Demanding now that the conditions (2) on each of the fictitious crack , we obtain a system of 10- singular integral equations of the form

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^5 \sum_{m=1}^2 \int_{-l_m}^{l_m} F_{im}(\xi) \left[\frac{d_{mn}^{ij}}{\xi-x} + K_{nm}^{ij}(\xi, x) \right] d\xi = C_{in} f_{in}(x), \quad x \in l_m \quad (n=1,2, \quad i=\overline{1,5}).$$

Here $F_{im}(\xi)$ - derived from the generalized displacement jumps along the normal to the contour of the two cracks - $K_{nm}^{ij}(\xi, x)$ continuous functions of their arguments functions f_i ($i=\overline{1,5}$) for each of the cracks. As shown in (2) function $f_{in}(x)$ is discontinuous at the vertices of real cracks and contain unknown efforts and moments - reactions of plastic zones.

Limits of integration in the system (6) is unknown, as is the unknown length of the plastic zone. Thus obtained integral equations are supplemented conditions ductility of thin shells (four zones) and the conditions of limited efforts and moments in the vicinity of the crack tip (all coefficients equal to zero intensity at all heights cracks).

Example . Where a spherical shell weakened by two equal length cracks and these cracks are in the same load conditions , and the load is symmetrical relative to the location of the crack line , then the system of integral equations (6) takes the form :

$$(7) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \varphi_j(u) K_{ij}(l(u, s)) du = f_i(s) \quad (i=1,2)$$

Here - $K_{ij} = \frac{d_{ij}}{u-s} + \frac{d_{ij}}{u+s+2d^{(c)}} + K_{ij}(u-s) + K_{ij}(u+s+2d^{(c)})$, $l_1 = l_2 = l$, $s = \frac{x}{l}$, $d^{(c)} = \frac{d_c}{l}$, $2d_c$ - the distance between the centers of cracks.

When solving integral equations (7) the condition must be

$$1) \text{ the uniqueness of displacements } \int_{-1}^1 \varphi_j(u) du = 0 \quad (j=1,2)$$

(8)

2) the conditions of plasticity Tresk $\frac{N^{(n)}}{2h\sigma_T} + \frac{3|M^{(n)}|}{h^2\sigma_T} = 1$

- The condition of plasticity of the surface layer (9)

or

- $\left(\frac{N^{(n)}}{2h\sigma_T}\right)^2 + \frac{|M^{(n)}|}{h^2\sigma_T} = 1$ The condition of the plastic hinge (10)

3) the conditions of limiting efforts and moments

$$(11) \quad K_N^{(n)} = 0, \quad K_M^{(n)} = 0$$

Here: $n=1,2$ - zone near neighbors and distant tip of cracks, respectively.

Thus, we have a complete system of equations to determine : 1) derived from hops generalized displacements, 2) unknown efforts and moments acting in the plastic zones, 3) lengths of plastic zones.

But the right-hand sides of system(7) is discontinuous functions. Numerical experiment showed that direct methods for solving these equations give an error at the points gap, and that is where we need to know the values of jumps to find disclosing of real crack tip. Therefore, solution of system (7) look as:

$$(12) \quad \varphi_j(u) = h_j(u) + \Omega_j(u)$$

Where $h_j(u)$ satisfy the canonical equations obtained from (7), as follows:

$$(13) \quad \int_{-1}^1 h_j(u) \frac{d_{ij}}{u-s} = f_i(s) \quad (i=1,2)$$

Substituting (12) into (7), taking into account (13), we obtain the system of integral equations for determining the functions $\Omega_j(u)$. In the resulting system of equations are right continuous functions.

Therefore, the construction of its solution we use the method of mechanical quadratures, which allows the resulting system of singular integral equations reduce to a system of algebraic equations. Unknown function $\Omega_j(u)$ represented as

$$\Omega_j(u) = \frac{\psi_j(u) + c_j}{\sqrt{1-u^2}}$$

and for functions $\psi_j(u)$ we construct interpolation polynomials of Lagrange for Chebyshev nodes.

The

functions $h_j(u)$ we find by the inversion formula of Cauchy type integrals

$$\text{where} \quad h_j(u) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-u^2}} \left[\pi D_i^0(N_1^0, M_1^0)u - D_i^0(N^{(n)}, M^{(n)})Z(u) \right],$$

$$D_i^0(N, M) = d_{1i} \frac{N}{2h\sigma_T} + d_{2i} \frac{k^* M}{h^2\sigma_T} \quad (i=1,2),$$

$$Z(u) = 2v^* u + L^*(u), \quad v^* = \arctan \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{l_0}{l},$$

$$k^* = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{2}, \quad L^*(u) = \ln \left| \frac{\tau_0 \sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-u^2}}{\tau_0 \sqrt{1-u^2} + u\sqrt{1-u^2}} \right|$$

Since the limit of integration (option l) is included in the system of nonlinear algebraic equations , so the algorithm is proposed for solving this system is. We set the length of the two plastic zones. The problem solve as in the case of the elastic problem.

Then with the conditions (11) we determine the efforts $N^{(1)}, N^{(2)}$ and moments $M^{(1)}, M^{(2)}$ and check the condition of plasticity (9) or (10). If it is done with pre- specified accuracy , the problem is solved. If not, then definitely changing l_p and l^p the whole procedure is repeated .

After integrating the obtained solution we find disclosing of crack by the formula

$$\delta(x,\gamma) = \left[v \left(\frac{x}{l} \right) \right] + \gamma \left[\gamma_2 \left(\frac{x}{l} \right) \right], \quad |x| \leq l, \quad |\gamma| \leq h$$

Numerical analysis was carried out for transversely - isotropic shell with parameters $R/h=100; \nu=0.3$, under the action of internal pressure intensity. In Fig. 1 shows the dependence of the relative tip of cracks $\delta^* = \delta E/l \Omega_T$ from its length to load $N_2^0/(2h\Omega_T)$. The curves 1, 2 correspond to the parameters of shear stiffness $E/G' = 2.6; 20$. Figure 2 shows the disclosing of crack tip in their interaction in isotropic shell ($E/G' = 2.6$). The solid curves correspond to neighbor vertices, and dashed correspond distant . Curves 1 correspond to the length of cracks $l/h=5$ and curves 2 $l/h=10$ - . Disclosure was determined on the middle surface ($\gamma = 0$).

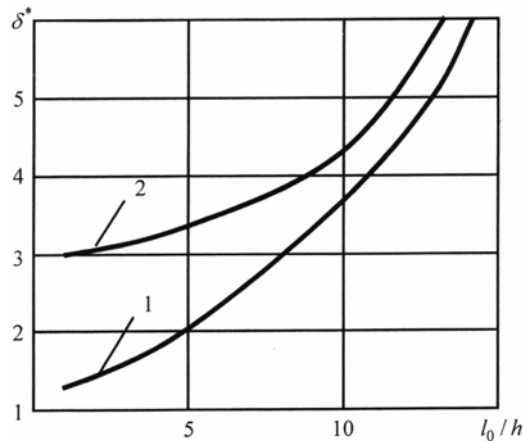


Figure 1 - Dependence relative of disclosing tops of cracks $\delta^* = \delta E/l \Omega_T$ of its length for loading $N_2^0/(2h\Omega_T)$

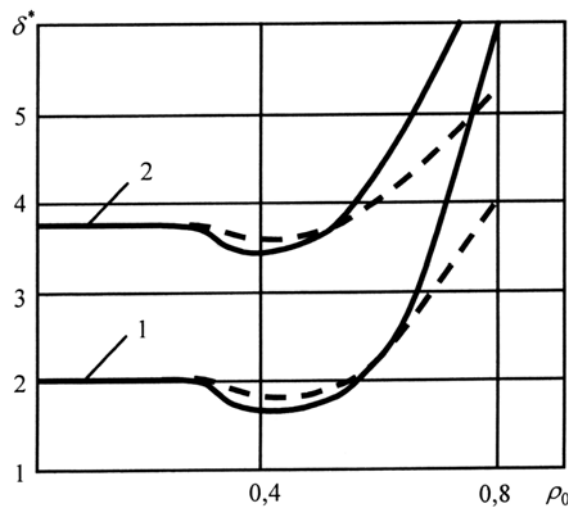


Figure 2 - Dependence of disclosing tops of cracks in their interaction in isotropic shell ($E/G' = 2.6$).

Conclusions.

1. Based on the proposed approach in working we can construct analytical solutions of the limit equilibrium of any shell cracked, for which was constructed the fundamental solution .
2. Numerical analysis showed that for shells that are loaded only relatively normal line efforts opening cracks in the outer surfaces and the average surface differs not more than 5% of the impact parameter approximation cracks transversely isotropic in their opening decreases.